

M/M/1/∞ ($F_c F_s$)

Ανάλυση των καταστάσεων του συστήματος σε στατιστική ισορροπία

Όταν τη χρονική στιγμή μηδέν ένα σύστημα εξυπηρέτησης αρχίζει τη λειτουργία του είναι λογικό για κάποιο χρόνο να ακολουθείται μια διαταραγμένη λειτουργία.

Πχ τη στιγμή που ανοίγουν τα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου, περιμένει απ' έξω ένας αριθμός ασθενών (πελατών). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο χρόνος αναμονής στην ουρά ενός πελάτη που έρχεται λίγο μετά την έναρξη λειτουργίας του συστήματος, να εξαρτάται από τον αριθμό των "αρχικών" πελατών και από το χρόνο της αίτησής του.

Έπειτα ώρα με την ώρα η κατάσταση του συστήματος ανεβαρτητοποιείται από τον χρόνο λειτουργίας του και τις αρχικές συνθήκες (αρχικό αριθμό πελατών). Και πλέον εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των πελατών που μπαίνουν ή βγαίνουν.
(από το σύστημα) $P_n(t)$.

Αυτό μας οδηγεί στο να δεχθούμε "θεωρητικά" ότι:

Όταν $t \rightarrow +\infty$ το σύστημά μας περιέχεται - βρίσκεται σε μια κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

Τότε ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη ή το μήκος της ουράς δεν εξαρτάται από το χρ. διάστημα λειτουργίας του συστήματος μέχρι τη στιγμή της αίτησής του συγκεκριμένου πελάτη.

Ανάλυση του ΜΙΜΙ/1/∞ (F_cF_s) σε κατάσταση στατιστικής ισορρ.

ΥΠΕΝΟΜΙΣΗ: Ξεκινώντας από διαδικασία Γεννήσεων-Θανάτων

για την περίπτωση $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$ με $n=0,1,2$ και $n=1,2,\dots$ αντισ

καταλήγαμε στο εφής:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} + \lambda p_0(t) = \mu p_1(t) & (1) \\ \vdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) & (2) \end{cases}$$

$n=1,2,\dots$

Για την ανάλυση
σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας: $P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t)$

Δεχόμαστε ότι: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dp_n(t)}{dt} = 0$.

Τότε από την (1) προκύπτει: $\lambda p_0(t) = \mu p_1(t) \Rightarrow \boxed{\lambda p_0 = \mu p_1}$
 $\Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0} *$

Από την (2), για $n=1$ έχουμε:

$$(\lambda + \mu) p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \xrightarrow{*} (\lambda + \mu) \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \lambda p_0 + \mu p_2 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu} p_0 + \lambda p_0 = \lambda p_0 + \mu p_2 \Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0}$$

Όμοια προκύπτει: $P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n} p_0 = \rho^n p_0 \quad n=1,2$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (πυκνότητα κυκλοφορίας).

Γενικά με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα κυκλοφορίας

Πυκνότητα κυκλοφορίας

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης})}{E(\text{χρόνος μεταξύ 2 αφίξεων})}$$

$$\text{Θυμάμαι: } E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης}) = \int_0^{+\infty} x \cdot \mu e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu}$$

$$E(\text{χρόνος μεταξύ 2 αφίξεων}) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$\hookrightarrow \infty < \infty(\lambda)$

$$\text{Έχω ότι } p_n = \rho^n p_0, n \geq 1 \text{ με } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Προσδιορισμός του p_0 ?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 + \rho p_0 + \dots + \rho^n p_0 + \dots = 1$$

$$\Rightarrow p_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \right] = 1 \Rightarrow p_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \right]^{-1}$$

$$\text{Συνεπώς } p_0 = \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i \right]^{-1}$$

Άρα για να υπάρχει στατιστική ισορροπία θα πρέπει $\rho < 1$

δηλ. πρέπει $\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$

ή $E(\text{χρόνος εξυπηρέτησης}) < E(\text{χρόνος μεταξύ 2 αφίξεων})$

$$\text{Τότε (αν } \rho < 1) \quad p_0 = \left[\frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} = 1-\rho$$

$$\text{και } p_n = (1-\rho) \rho^n, n \geq 1$$

Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα σε κατάσταση στατ. ισορρ.

Έστω W η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα σε κατάσταση στατ./κής ισορροπίας

Οι δυνατές τιμές της τ.μ. W είναι: $0, 1, 2, 3, \dots$

με αντίστοιχες πιθανότητες: $P_0, P_1, \dots$

Η τ.μ. W είναι διακριτή και σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής

$$EW = L = \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n$$

Υπενθύμιση: $EX = \begin{cases} \sum_x x P(x=x), & x \text{ διακριτή} \\ \int_x x f_x(x) dx, & x \text{ συνεχή} \end{cases}$

Αν $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ (τότε έχουμε στατ./κή ισορροπία)

Είναι $P_0 = p, \dots, P_n = (1-p)p^n, n \geq 1$

Συνεπώς $L = \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)p^n$

Υπενθύμιση: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)^{-1}$ παραγwg. $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } L = EW &= \sum_{n=0}^{+\infty} [n(1-p)p^n] \\ &= (1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} [n p^{n-1} p] \end{aligned}$$

$$= (1-p) p \sum_{n=0}^{+\infty} n p^{n-1}$$

$$\stackrel{p < 1}{=} (1-p) p (1-p)^{-2} \Rightarrow$$

Μέσος αριθμός πελατών
στο σύστημα

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \rho < 1$$

Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορρ.

Έστω Z η τ.μ που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

Οι δυνατές τιμές της τ.μ Z είναι $0, 1, 2, 3, \dots$

Η τιμή 0 στην ουρά σημαίνει : • Είτε 0 στο σύστημα (σύστημα = ταμείο + ουρά)

• Είτε 1 στο σύστημα (1 στο ταμείο και κανένας στην ουρά)

Η τιμή 1 στην ουρά σημαίνει: 2 στο σύστημα (1 στο ταμείο + 1 στην ουρά)

Έτσι για τη τιμή k στην ουρά, $k \neq 0$, σημαίνει τιμή $k+1$ στο σύστημα (k στην ουρά + 1 ταμείο)

$$\text{Έτσι } P(Z=0) = P(W=0 \text{ ή } W=1) = p_0 + p_1$$

$$P(Z=k) = P_{k+1}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Άρα η Z είναι μια τ.μ (διακριτή) με μέση τιμή

$$L_q = E Z = 0(p_0 + p_1) + 1 p_2 + 2 p_3 + \dots$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{+\infty} n p_{n+1} \Rightarrow L_q = \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-p) p^{n+1}$$

Υπενθύμιση: $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2} \quad x < 1$

όπως $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$

Επομένως

$$L_q = (1-p)p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n p^{n-1} \rightarrow L_q = (1-p)p^2(1-p)^{-2}$$

Άρα $L_q = \frac{p^2}{1-p}, p < 1$ ← Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά.

Παρατήρηση L : μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (ουρά + ταμείο)

L_q : μέσος αριθμός πελατών στην ουρά.

$$L - L_q = \frac{p}{1-p} - \frac{p^2}{1-p} = \frac{p(1-p)}{1-p} \Rightarrow$$

$$L - L_q = p = \frac{\lambda}{\mu}$$

p : πυκνότητα κυκλοφορίας

αριθμός πελατών στη διαδρομή μιας εξυπηρέτησης.

Έστω W_n η τ.μ που παριστάνει το χρόνο αναμονής του n -οστού πελάτη στο σύστημα, δηλ. στην ουρά και στο κανάλι εξυπηρέτησης.

Οι δυνατές τιμές της τ.μ W_n είναι: $(0, +\infty)$

Άρα πρόκειται για συνεχή τ.μ.

Συμβολίζω με $f_n(w)$ την συνλ. πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) της τ.μ W_n .

$$\text{Από ορισμό σ.π.π} \quad f_n(w) dw = P[w < W_n \leq w + dw]$$

ΣΤΟΧΟΣ: να συνδεθεί ο χρόνος αναμονής του n -οστού και $(n+1)$ -οστού πελάτη για την εύρεση μιας αναγκαστικής σχέσης. Στη μελέτη αυτή θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

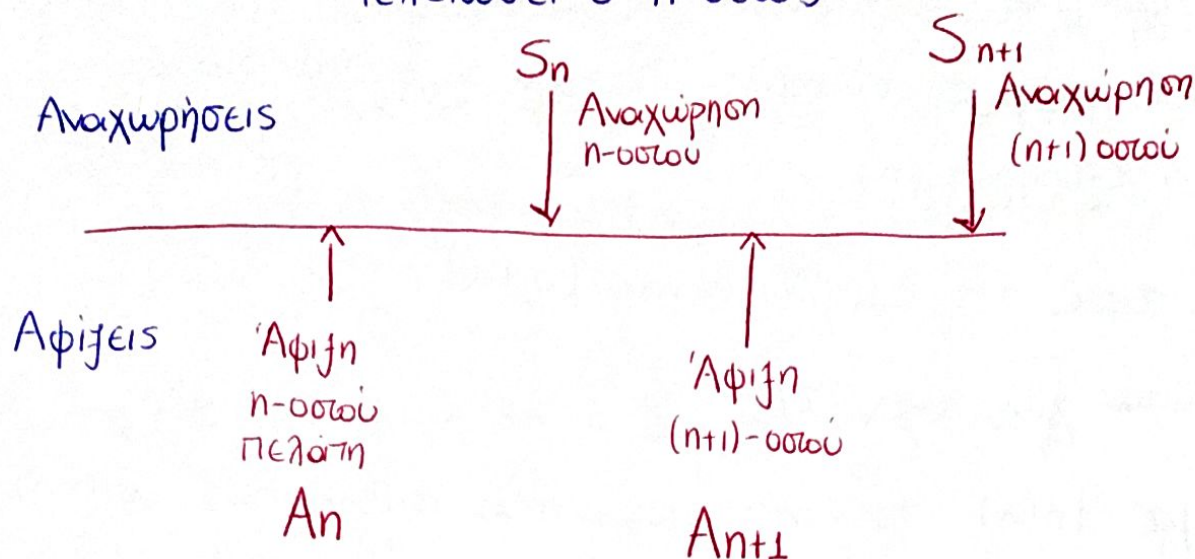
Ο $(n+1)$ -οστος πελάτης έρχεται και χωρίς να περιμένει στην ουρά εξυπηρετείται. Αυτό συμβαίνει, διότι έρχεται αφού έχει τελειώσει ο n -οστος πελάτης.

(δηλ ο n -οστος έφυγε, γιατί εξυπηρετήθηκε)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

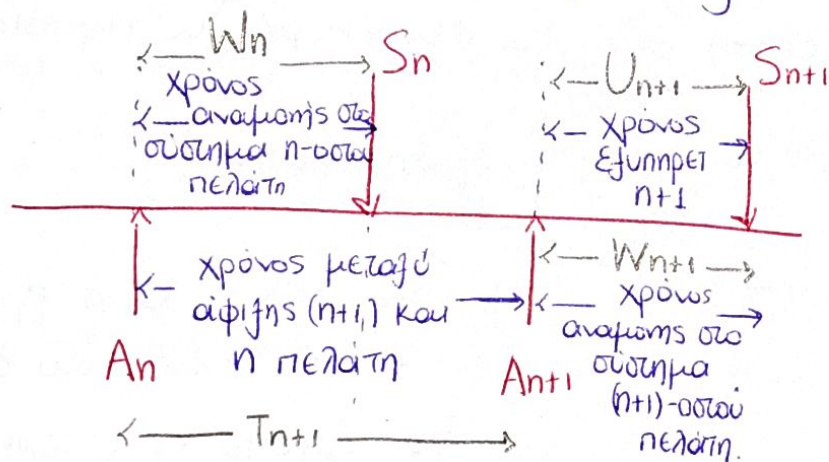
Ο $(n+1)$ οστος πελάτης βρίσκεται τον n -οστό πελάτη στο σύστημα. Άρα έρχεται πριν τελειώσει ο n -οστος πελάτης.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 Ο $(n+1)$ -οστός πελάτης έρχεται ενώ έχει τελειώσει ο n -οστός



Συμβολίζουμε με S_i : χρόνο αναχώρησης i -οστού πελάτη
 A_i : χρόνο άφιξης i -οστού πελάτη.

Τότε το παραπάνω σχήμα εμφανίζεται:



Συμβολίζουμε με: U_i : χρόνο εξυπηρέτησης i -οστού πελάτη

T_{n+1} : χρόνος μεταξύ $n+1$ άφιξης και n άφιξης

W_i : χρόνος αναμονής i -οστού πελάτη

Επομένως:
$$\int_{n+1}^I (w) dw = P[W < W_{n+1} \leq w + dw]$$

$$= P[W < U_{n+1} \leq w + dw, 0 < W_n < T_{n+1}, 0 < T_{n+1} < \infty]$$

Επεξήγηση: για να βρεί το σύστημα αδειο ο $(n+1)$ -πελάτης
πρέπει ο χρόνος αναμονής W_n να είναι μικρότερος
από τον χρόνο μεταξύ των αφίξεων $n+1$ και η πελάτη.

Επίσης σύμφωνα με το σχήμα $U_{n+1} \equiv W_{n+1}$

Επομένως έχουμε το παραπάνω αποτέλεσμα

$$f_{n+1}^I(w)dw = P[W < U_{n+1} \leq w+dw, 0 < W_n < T_{n+1}, 0 < T_{n+1} < +\infty]$$

ανεξ/τα $P[W < U_{n+1} \leq w+dw] \cdot P[0 < W_n < T_{n+1}, 0 < T_{n+1} < +\infty]$

ΠΡΟΣΟΧΗ ∇

$U_{n+1} \rightarrow$ χρόνος εξυπηρέτησης
($n+1$)-οστού πελάτη
ακολουθεί $Εκθ(\mu)$

$T_{n+1} \rightarrow$ χρόνος μεταξύ δυο αφίξεων

Poisson(λ) έχουμε δει ότι ακολουθεί $Εκθ(\lambda)$

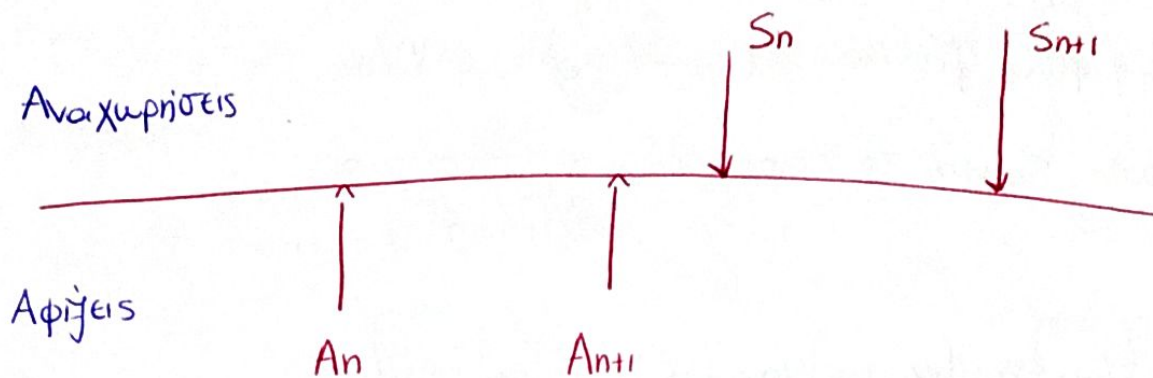
$W_n \rightarrow$ έχει σ.π.π $f_n(\cdot)$

Τότε: $f_{n+1}^I(w) = \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \int_{x=0}^t f_n(x) dx.$

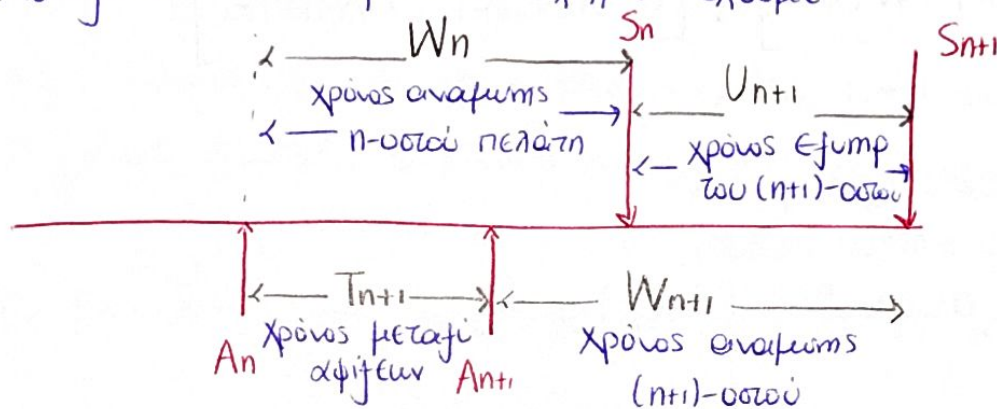
Άρα

$$f_{n+1}^I(w) = \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f_n(x) dx dt$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 Ο $(n+1)$ -οσός πελάτης περιμένει στην ουρά γιατί όταν έρχεται, ο n -οσός πελάτης δεν έχει φύγει.



Εμπλουτίζοντας το παραπάνω σχήμα έχουμε



Σύμφωνα με το σχήμα έχουμε ότι:

$$U_{n+1} < W_{n+1}$$

$$W_n + U_{n+1} = T_{n+1} + W_{n+1}$$

Τότε

$$f_{n+1}^{II}(w) dw = P[W_n < W_{n+1} \leq w + dw]$$

$$= P[0 < T_{n+1} < +\infty, 0 < U_{n+1} < W_{n+1}, w < W_n + U_{n+1} - T_{n+1} \leq w + dw]$$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}^{II}(w) dw = P[0 < T_{n+1} < +\infty, 0 < U_{n+1} < W_{n+1}, T_{n+1} - U_{n+1} + w < W_n \leq w + dw - U_{n+1} + T_{n+1}]$$

$$= \int_{t=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u=0}^w \mu e^{-\mu u} du \underbrace{f_n(t-u+w)}_{\text{από ορισμό στην } W_n} dw$$

T_{n+1} : ακολουθεί $\text{Exp}(\lambda)$, U_{n+1} : ακολουθεί $\text{Exp}(\mu)$

Άρα

$$f_{n+1}^{II}(w) = \int_{t=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u=0}^w \mu e^{-\mu u} f_n(t-u+w) du dt$$

Επομένως

$$f_{n+1}(w) = f_{n+1}^I(w) + f_{n+1}^{II}(w)$$

$$f_{n+1}(w) = \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f_n(x) dx dt + \lambda \mu \int_{t=0}^{+\infty} \int_{u=0}^w e^{-\lambda t} e^{-\mu u} f_n(t-u+w) du dt$$

Έχουμε προσδιορίσει το χρόνο αναμονής του $(n+1)$ -οστού πελάτη ως σωληνισμό του χρόνου αναμονής του n -οστού.

Αυτό μας δίνει λύση, διότι: Επειδή χωρίζουμε την $f_0(w)$

όπου είναι η σ.π.π του χρόνου εξυπηρέτησης του 1^{ου} πελάτη

$$f_0(w) = \mu e^{-\mu w}, w \geq 0, \text{ εκθ}(\mu)$$

οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε $\forall n$ της σ.π.π $f_n(w)$

Χρόνος αναμονής ενός πελάτη σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

Έστω ότι το σύστημα έχει φτάσει σε κατάσταση στατικής ισορροπίας και έστω W η Τ.μ που παρουσιάζει το χρόνο αναμονής ενός πελάτη σ' αυτή με σ.π.π $f(w)$

Σε κατάσταση στατικής ισορροπίας ισχύει ότι:

$$f_{n+1}(w) \equiv f_n(w) = f(w)$$

Υπενθύμιση: Δείξαμε πριν ότι

$$f_{n+1}(w) = \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f_n(x) dx dt + \lambda \mu \int_{t=0}^{+\infty} \int_{u=0}^w e^{-\lambda t} e^{-\mu u} f_n(t-u+w) du dt$$

Α ΤΡΟΤΟΣ

Ενοφύτως:

$$\begin{aligned} f(w) &= \underbrace{\mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f(x) dx dt}_A + \underbrace{\lambda \mu \int_{t=0}^{+\infty} \int_{u=0}^w e^{-\lambda t} e^{-\mu u} f(t-u+w) du dt}_B \\ &= A + B \end{aligned}$$

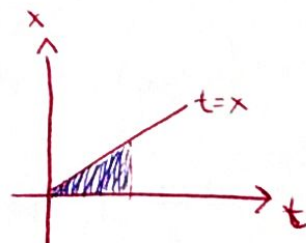
Υπενθύμιση:

Ο μετασχηματισμός Laplace της $f(w)$ είναι: $g(z) = \int_{w=0}^{+\infty} e^{-zw} f(w) dw$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$L(A) = \int_{w=0}^{+\infty} e^{-zw} \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f(x) dx dt dw$$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{t=x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} f(x) dt dx \quad \text{ΔΙΟΤΙ:}$$



Όπως $\int_{x=0}^{+\infty} \int_{t=x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} f(x) dt dx$ είναι

$$\int_{x=0}^{+\infty} f(x) \int_{t=x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt dx = \int_{x=0}^{+\infty} f(x) [-e^{-\lambda t}]_{t=x}^{+\infty} dx = \int_{x=0}^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } L(A) &= \int_{w=0}^{+\infty} e^{-zw} \mu e^{-\mu w} \int_{t=0}^{+\infty} \int_{x=0}^t \lambda e^{-\lambda t} f(x) dx dt dw \\ &= \int_{w=0}^{+\infty} \mu e^{-(\mu+z)w} \int_{x=0}^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx dw \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow L(\lambda) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{\mu}{\mu+z} f(x) e^{-\lambda x} dx$$

$$\boxed{L(\lambda) = \frac{\mu}{\mu+z} g(\lambda)} \quad \text{όπου } g(\cdot) \text{ μετασχηματισμός Laplace της } f(\cdot)$$

$$L(B) = \int_{w=0}^{+\infty} e^{-zw} \lambda \mu \int_{t=0}^{+\infty} \int_{u=0}^w e^{-\lambda t} e^{-\mu u} f(t+u+w) du dt dw$$

$$= \int_{t=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u=0}^{+\infty} \mu e^{-\mu u} \underbrace{\int_{w=u}^{+\infty} e^{-zw} f(t+w-u) dw}_{= e^{-zw} \int_{w=u}^{+\infty} e^{-z(w-u)} f(t+w-u) dw} du dt$$

$$\underline{\underline{\phi = w - u}} \quad e^{-zu} \int_{\phi=0}^{+\infty} e^{-z\phi} f(t+\phi) d\phi$$

$$\underline{\underline{h = t + \phi}} \quad e^{-zu} \int_{h=t}^{+\infty} e^{-z(h-u)} f(h) dh$$

$$= e^{-zu} e^{zt} \int_{h=t}^{+\infty} e^{-zh} f(h) dh$$

$$\text{Άρα } L(B) = \int_{t=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u=0}^{+\infty} \mu e^{-\mu u} e^{-zu} e^{zt} \int_{h=t}^{+\infty} e^{-zh} f(h) dh du dt$$

$$= \int_{t=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\mu}{\mu+z} e^{zt} \int_{h=t}^{+\infty} e^{-zh} f(h) dh dt$$

$$= \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\lambda \mu}{\mu+z} e^{-(\lambda-z)t} \int_{h=t}^{+\infty} e^{-zh} f(h) dh dt$$

$$L(B) = \frac{\lambda \mu}{\mu + z} \int_{h=0}^{+\infty} e^{-zh} f(h) \int_{t=0}^h e^{-(\lambda-z)t} dt dh$$

$$= \frac{\lambda \mu}{\mu + z} \int_{h=0}^{+\infty} e^{-zh} f(h) - \frac{1}{\lambda - z} e^{-(\lambda-z)t} \Big|_0^h dh$$

$$= \frac{\lambda \mu}{\mu + z} \int_{h=0}^{+\infty} e^{-zh} f(h) \frac{1}{\lambda - z} [1 - e^{-(\lambda-z)h}] dh$$

$$\Leftrightarrow L(B) = \frac{\lambda \mu}{\mu + z} \cdot \frac{1}{\lambda - z} \cdot \left[\int_{h=0}^{+\infty} e^{-zh} f(h) dh - \int_{h=0}^{+\infty} e^{-zh} e^{-(\lambda-z)h} f(h) dh \right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L(B) = \frac{\lambda \mu}{\mu + z} \frac{1}{\lambda - z} [g(z) - g(\lambda)]} \quad g(\cdot) \text{ μετασφωσ Laplace της } f(\cdot)$$

Ποσών: $g(z) = \frac{\mu}{z + \mu} g(\lambda) + \frac{\lambda \mu}{\mu + z} \frac{1}{\lambda - z} [g(z) - g(\lambda)]$

$$\Leftrightarrow g(z) = \frac{\frac{\mu}{\mu + z} g(\lambda) \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda - z} \right]}{1 - \frac{\lambda \mu}{(z + \mu)(\lambda - z)}}$$

$$g(z) = \frac{\frac{\mu}{z + \mu} \frac{-z}{\lambda - z}}{1 - \frac{\lambda \mu}{(z + \mu)(\lambda - z)}} \quad g(\lambda) \Rightarrow g(z) = \frac{-\mu z}{-z^2 + \lambda z - z\mu} g(\lambda)$$

Άρα

$$\boxed{g(z) = \frac{\mu}{z + \mu - \lambda} g(\lambda)}$$

Επειδή $g(\lambda)$: Γνωρίζω $1 = \int_0^{+\infty} f(w) dw$ και $g(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zw} f(w) dw$
 Άρα $g(0) = 1$

Επομένως $1 = \frac{\mu}{\mu-\lambda} g(\lambda) \Rightarrow g(\lambda) = \frac{\mu-\lambda}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1-\rho$

Άρα $g(z) = \frac{\mu}{z+\mu-\lambda} \frac{\mu-\lambda}{\mu} \Rightarrow \boxed{g(z) = \frac{\mu-\lambda}{z+\mu-\lambda}}$

Μετρίως Laplace της $f(w)$: $g(z) = \frac{\mu-\lambda}{z+\mu-\lambda}$

Υπόθεση: Μετρίως Laplace της $f(t) = A e^{-\alpha t}$ είναι
 $g(t) = \frac{A}{z+\alpha}$

Άρα $f(w) = (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)w}$, $w \geq 0$

$f(w) = \mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-\mu \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) w}$, $w \geq 0$

$f(w) = \mu (1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)w}$, $w \geq 0$

SOS πιο εύκολος.

Αυτόν θα χρησιμοποιώ

Β ΤΡΟΠΟΣ εύρεσης χρόνου αναμονής σε κατάσταση ολικής ισορροπίας

Όταν ένας πελάτης έρχεται στο σύστημα, τότε είτε δε θα βρει κανέναν άλλο μέσα είτε θα βρει ένα ή δυο ή ...

Έστω W η τ.μ που παριστάνει το χρόνο αναμονής ενός πελάτη σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

Τότε από θεώρημα ολικής Πιθανότητας $P(A) = \sum P(A|B_i) P(B_i)$

$f(w) dw = P[w < W \leq w+dw]$

$= P[w < W \leq w+dw \mid \beta \text{ ή } \kappa \text{ ο πελάτης}] \cdot P[\text{να βρει ο πελάτης}]$

$+ P[w < W \leq w+dw \mid \beta \text{ ή } \kappa \text{ 1 πελάτη}] P[\text{να βρήκε 1 πελάτη}]$

+ ...

Τότε θα πρέπει να προσδιορίσουμε καιθε μια από τις πιθανότητες που εμφανίστηκαν.

$$P[\text{να βρει 0 πελάτες}] \stackrel{\text{είμαστε σε στατική ισορροπία}}{=} P_0$$

$$P[\text{να βρει } i \text{ πελάτες}] = P_i \quad i=1, \dots$$

$$\text{Επίσης } P[W < W \leq w + dw \mid \text{βρήκε 0 πελάτες}]$$

$$\stackrel{\text{αίδειο σύστημα εφ' ου ην κατευθείαν Εκθ}(\mu)}{=} \mu e^{-\mu w} dw$$

Μένει τώρα να βρω την $P[W < W \leq w + dw \mid \text{βρήκε } i \text{ πελάτες}]$.

Όταν βρίσκει $i=1, 2, \dots$ πελάτες στο σύστημα τότε ο χρόνος αναμονής του με τι ισούται;

Ισούται με το άθροισμα $i+1$ το πλήθος ανεξάρτητων και ισόνομων z_i από $\text{Εκθ}(\mu)$

Θυμηθείτε : χρόνος εφ' ου ην $\text{Εκθ}(\mu)$

Επομένως αρμεί να βρω την κατανομή του αθροίσματος $i+1$ το πλήθος ανεξάρτητων και ισόνομων $\text{Εκθ}(\mu)$

Πως βρίσκω σιγά σιγά την κατανομή αθροίσματος z_i ?

ΜΕΘΟΔΟΣ ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ.

Έστω $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ με Y_i ανεξ. και ισόνομες z_i .

Τότε

$$m_z(t) = E(e^{tz}) \Rightarrow m_z(t) = E\left(e^{t(y_1 + \dots + y_n)}\right) \Rightarrow m_z(t) = E(e^{ty_1} \dots e^{ty_n})$$

ανεξ. $\Rightarrow m_z(t) = E(e^{ty_1}) \dots E(e^{ty_n})$

ισόνομες $\Rightarrow m_z(t) = E(e^{ty}) \dots E(e^{ty})$

$$\Rightarrow m_z(t) = (m_y(t))^n$$

Εδώ έχουμε να το εφαρμόσουμε για $n=i+1$ και $Y \sim \text{εκθ}(\mu)$

Τότε $m_z(t) = \left(\frac{\mu}{\mu-t}\right)^{i+1}$

$$m_z(t) = \left(\frac{\mu}{\mu(1-\frac{t}{\mu})}\right)^{i+1}$$

$$m_z(t) = \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)^{i+1}$$

Αυτή είναι η ροη/τρία της Γάμμα $(i+1, \frac{1}{\mu})$ και σ.π.π

$$f_z(z) = \frac{z^{(i+1)-1} e^{-z\mu}}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{i+1} \Gamma(i+1)}, z > 0$$

Επομένως

$$P[W < W \leq w+dw / \text{βρίναι i πελάτες}] = \frac{W^{i+1-1} e^{-\mu w}}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^{i+1} \Gamma(i+1)} dw$$

$$= \frac{\mu^{i+1} w^i e^{-\mu w}}{i!} dw$$

$$f(w) = \mu e^{-\mu w} p_0 + \frac{\mu^2 w e^{-\mu w}}{1!} p_1 + \frac{\mu^3 w^2 e^{-\mu w}}{2!} p_2 + \dots$$

Δηλαδή

$$f(w) = \mu e^{-\mu w} \left[p_0 + p_1 \frac{\mu w}{1!} + p_2 \frac{\mu^2 w^2}{2!} + \dots \right]$$

$$f(w) = \mu e^{-\mu w} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \frac{(\mu w)^n}{n!}$$

Έχουμε δείξει ότι:

$$p_n = (1-p) p^n \quad p < 1 \quad \mu \in p = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{Άρα } f(w) = \mu e^{-\mu w} (1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mu p w)^n}{n!}$$

$$\text{όπως } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\text{Άρα } f(w) = \mu e^{-\mu w} (1-p) e^{\mu p w}$$

$$f(w) = \mu (1-p) e^{-\mu(1-p)w}, w \geq 0$$

$$\text{Άμεσα προκύπτει ότι } EW = \frac{1}{\mu(1-p)}$$

$$\text{Δηλαδή ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι: } EW = \frac{1}{\mu(1-p)}$$

Αν W_q η τιμή που παρουσιάζει το χρόνο αναμονής στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορροπίας τότε:

$$W = W_q + \text{χρόνος εξυπηρέτησης}$$

$$\text{και } EW = EW_q + E(\text{χρόνο εξυπηρ.})$$

$$EW_q = EW - E(\text{χρόνο εξυπηρ.})$$

$$EW_q = \frac{1}{\mu(1-p)} - \frac{1}{\mu} \Rightarrow EW_q = \frac{1-(1-p)}{\mu(1-p)} = \frac{p}{\mu(1-p)}$$

Παρατήρηση

Είχαμε δει ότι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

L είναι σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Ενώ

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Προκύπτει (σχέσεις Little)

$$L = \lambda \cdot EW$$

$$L_q = \lambda \cdot EW_q \quad \text{όπου } \lambda \text{ η παράμετρος που δίνει ρυθμό αφίξεων.}$$